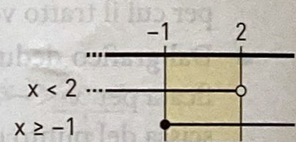
Teoria in sintesi

- Una **disequazione** è una disuguaglianza fra due espressioni letterali per la quale si cercano, se esistono, valori che, sostituiti a una o più lettere, rendono vera la disuguaglianza.
  Chiamiamo *soluzioni* tali valori e *incognite* le lettere per le quali cerchiamo le soluzioni.
  - Le soluzioni della disequazione $6 - x \geq 0$ sono:
    $x \leq 6$.

- Due disequazioni che hanno lo stesso insieme di soluzioni sono equivalenti. Come per le equazioni, per ottenere da una disequazione una disequazione equivalente, utilizziamo due **princìpi di equivalenza**.
  Applicando il secondo principio, se si moltiplicano o si dividono i membri per un numero negativo, si deve cambiare il verso della disequazione.
  - $-2x > -4 \rightarrow \dfrac{-2x}{-2} < \dfrac{-4}{-2} \rightarrow x < 2.$

- Per risolvere una **disequazione numerica intera**, utilizziamo i principi di equivalenza trasformandola in una delle forme $ax < b$, $ax \leq b$, $ax > b$ o $ax \geq b$ e dividendo per a quando $a \neq 0$.
  - $2x > 18 > 2 \rightarrow \underbrace{x > 9}_{\text{determinata}}$; $\quad x - 3 > x \rightarrow \underbrace{0x > 3}_{\text{impossibile}}$; $\quad x > x - 1 \rightarrow \underbrace{0x > -1}_{\text{sempre verificata}}$.

- Per risolvere un **sistema di disequazioni**, rappresentiamo le soluzioni di ogni disequazione su rette orizzontali e cerchiamo, se esiste, un intervallo comune a tutte le soluzioni.
  - $\begin{cases} 2x + 1 < 5 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x \geq -1 \end{cases} \rightarrow -1 \leq x < 2$



- Per risolvere una **disequazione fratta**, nell'incognita x, la si riconduce a una delle seguenti forme:
  $\dfrac{N(x)}{D(x)} > 0$, $\dfrac{N(x)}{D(x)} \geq 0$, $\dfrac{N(x)}{D(x)} < 0$ oppure $\dfrac{N(x)}{D(x)} \leq 0$.
  Si studia poi il segno della frazione algebrica.
  - $\dfrac{x-1}{x+1} \geq 0$

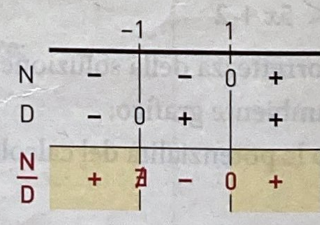
    $N(x) \geq 0 \rightarrow x - 1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$

    $D(x) > 0 \rightarrow x + 1 > 0 \rightarrow x > -1$

    i valori che annullano il denominatore non sono soluzioni

    La disequazione ha per soluzioni:

    $x < -1 \vee x \geq 1$.



- Per risolvere una **disequazione letterale** (intera o fratta), si procede come per le disequazioni numeriche, con l'aggiunta della discussione sui parametri letterali.

2 Le disequazioni

Disequazioni e soluzioni

> Teoria a pagina 595

10 **TEST** Quale dei seguenti numeri appartiene all'insieme delle soluzioni della disequazione $-x < -6$?

A 10 **B** 6 **C** $\frac{1}{6}$ **D** -6

Di fianco a ogni disequazione sono scritti alcuni valori. Determina quali sono soluzioni e quali non lo sono.

11 $a-3>5$ $\quad a=8;\quad a=\frac{9}{2};\quad a=\frac{17}{2};\quad a=\frac{28}{3}.$

12 $y+4\leq 6$ $\quad y=2;\quad y=\frac{3}{2};\quad y=\frac{1}{3};\quad y=0.$

13 $\frac{3x+2}{4}-\frac{x}{2}>2x-3$ $\quad x=1;\quad x=\frac{3}{2};\quad x=-2;\quad x=0.$

14 $-x+\frac{3}{2}\leq\frac{2x}{5}-\frac{1}{3}+2x$ $\quad x=\frac{1}{2};\quad x=-\frac{1}{2};\quad x=1;\quad x=\frac{3}{4}.$

15 $x+3\geq-\frac{3}{2}+\frac{x}{5}-6x$ $\quad x=-\frac{1}{2};\quad x=2;\quad x=-1;\quad x=0.$

La rappresentazione delle soluzioni

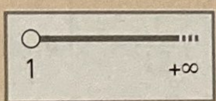
> Teoria a pagina 596

I FONDAMENTALI Rappresentare le soluzioni 1

Scriviamo i seguenti intervalli (o unioni di intervalli) utilizzando le parentesi quadre e rappresentiamoli graficamente:

a. $x>1$; **b.** $0<x<2$; **c.** $-1\leq x\leq 1$; **d.** $x\leq 3 \vee x\geq 5$.

a. $]1;+\infty[$

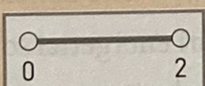


Estremo escluso:
- parentesi aperta;
- cerchietto vuoto.

In corrispondenza di $+\infty$ e di $-\infty$ la parentesi è sempre aperta.

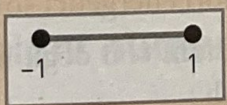
L'estremo 1 è **escluso**: abbiamo scritto $]1;+\infty[$; graficamente, 1 è rappresentato da un cerchietto vuoto. Poiché $+\infty$ non è un numero reale, ma un simbolo che rappresenta una quantità «più grande» di qualsiasi numero reale, abbiamo scritto $]1;+\infty[$.

b. $]0;2[$



I due estremi sono esclusi: abbiamo scritto $]0;2[$ e i due cerchietti sono vuoti.

c. $[-1;1]$

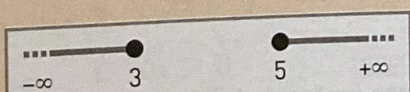


Estremo incluso:
- parentesi chiusa;
- cerchietto pieno.

Gli estremi -1 e 1 sono **inclusi**: abbiamo scritto $[-1;1]$ e i due cerchietti sono pieni.

d. $x\leq 3\vee x\geq 5$ è l'unione dei due intervalli $x\leq 3$ e $x\geq 5$:

$]-\infty;3]\cup[5;+\infty[$



Anche in questo caso i numeri 3 e 5 sono inclusi nell'intervallo e i cerchietti sono pieni.

PROVA TU. Svolgi un esercizio simile interattivo per vedere se hai capito.

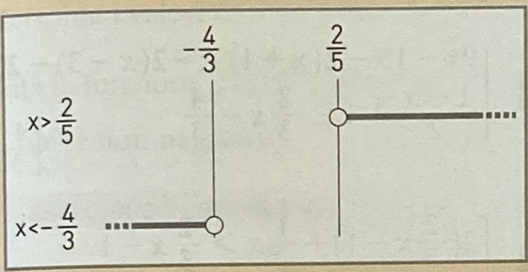
Risolviamo i seguenti sistemi di disequazioni.

a. $\begin{cases} 3(1-x) < 2x+1 \\ 2x-6 > 5x-2 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} \frac{3}{2}x - \frac{4}{3} + 5x \leq \frac{1}{2}x + 11 - \frac{1}{3} \\ \frac{6}{5}x + 1 - x < 2 + \frac{1}{2}x + \frac{7}{10}x \end{cases}$

a. Risolviamo le due disequazioni:

$$\begin{cases} 3-3x < 2x+1 \\ 2x-5x > -2+6 \end{cases} \to \begin{cases} -3x-2x < 1-3 \\ -3x > 4 \end{cases} \to \begin{cases} -5x < -2 \\ -3x > 4 \end{cases} \to \begin{cases} 5x > 2 \\ 3x < -4 \end{cases} \to \begin{cases} x > \frac{2}{5} \\ x < -\frac{4}{3} \end{cases}.$$

Rappresentiamo le soluzioni delle disequazioni.



Se non esistono valori di x per cui le due disequazioni sono verificate *contemporaneamente*, l'insieme delle soluzioni è vuoto.

Il sistema è impossibile.

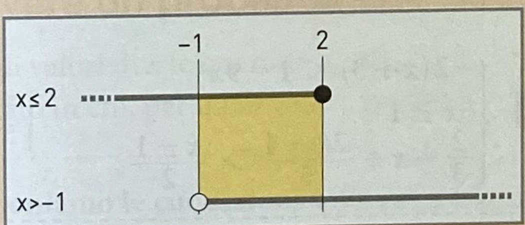
b. Risolviamo le due disequazioni:

$$\begin{cases} 9x - 8 + 30x \leq 3x + 66 - 2 \\ 12x + 10 - 10x < 20 + 5x + 7x \end{cases}$$

Se sono presenti dei denominatori numerici, conviene eliminarli per semplificare i calcoli.

$$\begin{cases} 39x - 3x \leq 64 + 8 \\ 2x - 12x < 20 - 10 \end{cases} \to \begin{cases} 36x \leq 72 \\ -10x < 10 \end{cases} \to \begin{cases} x \leq \frac{72}{36} \\ 10x > -10 \end{cases} \to \begin{cases} x \leq 2 \\ x > -1 \end{cases}.$$

Rappresentiamo le soluzioni delle disequazioni.



La zona colorata indica l'intersezione degli insiemi delle soluzioni, cioè le soluzioni comuni alle due disequazioni.

Le soluzioni sono: $-1 < x \leq 2$, ossia $]-1; 2]$.

PROVA TU. Svolgi un esercizio simile interattivo per vedere se hai capito.

Risolvi i seguenti sistemi di disequazioni.

170 $\begin{cases} x-1 > 0 \\ x-6 > 0 \end{cases}$ $[x > 6]$

171 $\begin{cases} 4x+6 < 0 \\ 6x \geq 0 \end{cases}$ [impossibile]

172 $\begin{cases} x+4 < 0 \\ 3x < 1 \end{cases}$ $[x < -4]$

173 $\begin{cases} x+1 > 0 \\ -2x \geq 0 \\ 3x+2 > 0 \end{cases}$ $[-\frac{2}{3} < x \leq 0]$

174 $\begin{cases} x-4 < 0 \\ 2-x > 0 \\ x+3 > 0 \end{cases}$ $[-3 < x < 2]$

175 $\begin{cases} 3x+9+2 < x-1 \\ 2x-3 > x+7 \end{cases}$ [impossibile]

176 $\begin{cases} x-6-x(x-1) > 2-x^2 \\ 2x-1 < 3 \end{cases}$ [impossibile]

177 $\begin{cases} x+7-3x \geq -x(x+1)+x^2-3-2x \\ 2x+3 < 7 \end{cases}$ $[-10 \leq x < 2]$

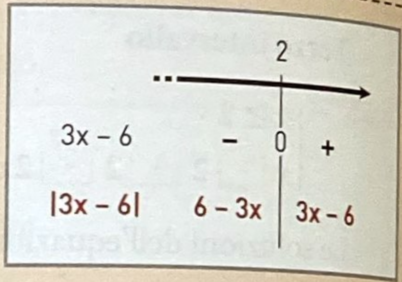
I FONDAMENTALI **Risolvere una disequazione con un valore assoluto** 7

Risolviamo la disequazione $|3x-6|-1>2(x+2)-x-2$.

Scriviamo la disequazione nella forma $|A(x)|>B(x)$:

$$|3x-6|>2x+4-x-2+1 \quad \to \quad |3x-6|>x+3.$$

Studiamo il segno dell'argomento $3x-6$: $\quad 3x-6\geq 0 \to x\geq 2$.

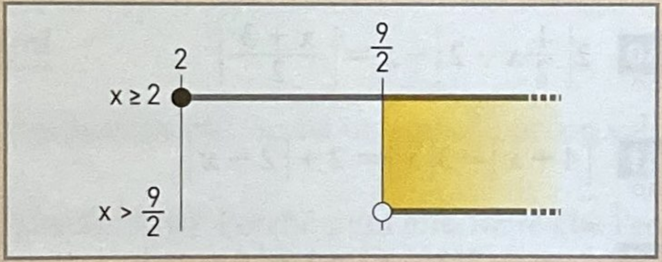


L'insieme delle soluzioni della disequazione è l'unione delle soluzioni di due sistemi.

Primo sistema

$$\begin{cases} x\geq 2 \\ 3x-6>x+3 \end{cases} \to \begin{cases} x\geq 2 \\ 3x-x>3+6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geq 2 \\ 2x>9 \end{cases} \to \begin{cases} x\geq 2 \\ x>\frac{9}{2} \end{cases}$$

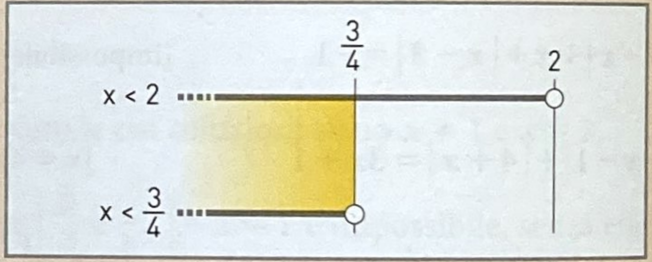


Le soluzioni comuni si hanno per $x>\frac{9}{2}$.

Secondo sistema

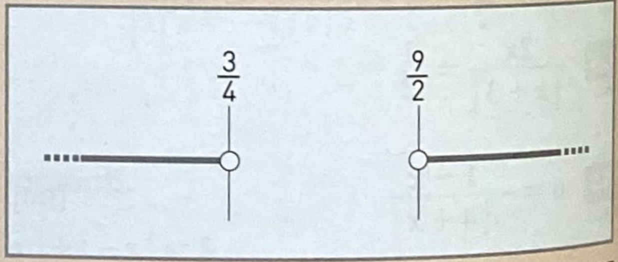
$$\begin{cases} x<2 \\ -3x+6>x+3 \end{cases} \to \begin{cases} x<2 \\ -3x-x>3-6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x<2 \\ -4x>-3 \end{cases} \to \begin{cases} x<2 \\ x<\frac{3}{4} \end{cases}$$



Le soluzioni comuni si hanno per $x<\frac{3}{4}$.

Per unire le soluzioni dei due sistemi, le rappresentiamo su una stessa retta.



La disequazione data ha per soluzioni:

$x<\frac{3}{4} \vee x>\frac{9}{2}$, ossia $\left]-\infty;\frac{3}{4}\right[\cup\left]\frac{9}{2};+\infty\right[$.

PROVA TU. Svolgi un esercizio simile interattivo per vedere se hai capito.

7 Lo studio del segno di un prodotto

> Teoria a pagina 605

Studio del segno

303 **COMPLETA LO SVOLGIMENTO** Studia il segno del prodotto $(x+1)(5-x)$.
Dal risultato ottenuto, deduci il segno del polinomio quando la variabile x assume i valori: $-2, -1, 0, 7$.

Studiamo il segno dei due fattori:

- $x+1>0 \rightarrow x>\boxed{-1}$;
- $5-x>0 \rightarrow -x>\boxed{-5} \rightarrow x\boxed{<}5$.

Il segno del prodotto dipende da quello dei suoi fattori e si ottiene con la regola dei segni.

Compiliamo il quadro applicando la regola dei segni. Detto p il prodotto:

- per $x<-1 \vee x>5, p<0$;
- per $x=-1 \vee x=5, p=0$.
- per $-1<x<5, p>0$;

		$\boxed{-1}$		5	
x+1	−	0	$\boxed{+}$		$\boxed{+}$
5−x	$\boxed{+}$		$\boxed{+}$	0	$\boxed{-}$
(x+1)(5−x)	$\boxed{-}$	0	+	0	$\boxed{-}$

Quindi, in particolare, per $x=-2$ e $x=7$, $p<0$; per $x=-1$, $p=0$; per $x=0$, $p>0$.

Studia il segno dei seguenti prodotti. Dai risultati ottenuti, deduci il segno per i valori indicati a fianco.

304 $x(x+8)$, $\quad x=-3, 0, 3$.

305 $(x-4)(6x+1)$, $\quad x=-1, 0, 1$.

306 $\left(x+\frac{1}{3}\right)(2x-1)$, $\quad x=-1, 0, 1$.

307 $(3x+2)(x+6)$, $\quad x=-7, -1, 2$.

308 $5(x+3)(2x-1)$, $\quad x=-4, 0, 4$.

309 $(3-2x)(4x-1)(2x-3)$, $\quad x=0, 1, 2$.

Risoluzione delle disequazioni e studio del segno

I FONDAMENTALI **Risolvere una disequazione con lo studio del segno di un prodotto** **8**

Risolviamo la disequazione $(x+3)(6-x)\leq 0$.

Studiamo il segno di ognuno dei fattori:

- $x+3>0 \quad \rightarrow \quad x>-3$;
- $6-x>0 \quad \rightarrow \quad -x>-6 \quad \rightarrow \quad x<6$.

Poniamo ciascun fattore >0, indipendentemente dal verso della disequazione.

Compiliamo il quadro dei segni.

		−3		6	
x+3	−	0	+		+
6−x	+		+	0	−
(x+3)(6−x)	−	0	+	0	−

Nella lettura finale del quadro dei segni, consideriamo il verso della disequazione iniziale e includiamo i valori che annullano il prodotto *solo se* il prodotto è ≤ 0 o ≥ 0.

Poiché si richiede che il prodotto sia negativo o nullo, le soluzioni della disequazione sono $x\leq -3 \vee x\geq 6$.

PROVA TU. Svolgi un esercizio simile interattivo per vedere se hai capito.

Risolvi le seguenti disequazioni.

310 $(x-5)(x+2)>0$ $\quad [x<-2 \vee x>5]$

311 $x(7x-2)\geq 0$ $\quad \left[x\leq 0 \vee x\geq \frac{2}{7}\right]$

312 $3x(2x-6)<0$ $\quad [0<x<3]$

313 $2x\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2)>0$ $\quad \left[-\frac{1}{2}<x<0 \vee x>2\right]$

341 $16x^4 \leq 0$ $[x = 0]$

342 $6x^2 + 3x^4 > 0$ $[x \neq 0]$

343 $(x^2 - 6x + 9)(x + 2) \geq 0$ $[x \geq -2]$

344 $x^4 - 5x^3 + 6x^2 < 0$ $[2 < x < 3]$

345 $x^3 - 4x^2 \geq 4x - 16$ $[-2 \leq x \leq 2 \vee x \geq 4]$

346 $3x(x^4 - 16) \geq (x^2 - 4)(x^2 + 4)$ $\left[-2 \leq x \leq \frac{1}{3} \vee x \geq 2\right]$

347 $x^3 + 5x^2 + 2x > 8$ $[-4 < x < -2 \vee x > 1]$

348 $(x^2 - 1)(4x^2 - 6x) < 0$ $\left[-1 < x < 0 \vee 1 < x < \frac{3}{2}\right]$

349 $x^3 - 5x^2 - 4x + 20 \leq 0$ $[x \leq -2 \vee 2 \leq x \leq 5]$

350 $(x^4 + x^2)(x^2 + 8x) \geq 0$ $[x \leq -8 \vee x \geq 0]$

351 $2x(x - 1)^2(x^2 + 4) \leq 0$ $[x \leq 0 \vee x = 1]$

352 $x^3 - 7x^2 + 11x - 5 \leq 0$ $[x \leq 5]$

8 Le disequazioni fratte

Le disequazioni numeriche fratte

Attività interattiva

> Teoria a pagina **606**

SPIEGALO TU

353 Perché puoi dire che la disequazione $\frac{1}{2(3x-1)^2} \leq -1$ è impossibile, senza effettuare alcun calcolo?

354 Perché una disequazione fratta è equivalente all'unione di due opportuni sistemi di disequazioni? Fai due esempi.

I FONDAMENTALI **Risolvere una disequazione fratta** **9**

Risolviamo la disequazione fratta $\frac{2x+3}{4x+4} - 1 \leq \frac{x-1}{x+1}$.

Scomponiamo in fattori il primo denominatore, poniamo le C.E. e calcoliamo il mcm:

$$\text{mcm}[4(x+1); (x+1)] = 4(x+1), \text{ C.E.: } x \neq -1.$$

Riduciamo la disequazione nella forma $\frac{N}{D} \leq 0$:

$$\frac{2x+3}{4(x+1)} - 1 - \frac{x-1}{x+1} \leq 0 \rightarrow \frac{2x+3-1\cdot(4x+4)-4(x-1)}{4(x+1)} \leq 0 \rightarrow \frac{-6x+3}{4(x+1)} \leq 0.$$

Per studiare il segno della frazione, studiamo i segni del numeratore N e del denominatore D, ponendo $N > 0$ e $D > 0$:

$$N > 0 \rightarrow -6x + 3 > 0 \rightarrow x < \frac{1}{2}$$

$$D > 0 \rightarrow 4(x+1) > 0 \rightarrow x > -1.$$

Poniamo sempre $N > 0$ e $D > 0$, indipendentemente dal simbolo $>, \geq, <, \leq$ che compare nella disequazione di partenza.

Compiliamo il quadro dei segni, aggiungendo la riga $\frac{N}{D}$, ottenuta con la regola dei segni.

		-1		$\frac{1}{2}$	
segno di N	+		+	0	−
segno di D	−	0	+		+
segno di $\frac{N}{D}$	−	∄	+	0	−

Quando N si annulla, anche $\frac{N}{D}$ si annulla; quando si annulla D, $\frac{N}{D}$ non esiste e lo indichiamo con ∄.

La disequazione richiede che la frazione sia negativa o nulla, quindi scegliamo le zone evidenziate in giallo. Le soluzioni si ottengono dall'unione di due intervalli:

$$x < -1 \vee x \geq \frac{1}{2}.$$

−1 è escluso perché annulla il denominatore

PROVA TU. Svolgi un esercizio simile interattivo per vedere se hai capito.

Risolvi le seguenti disequazioni numeriche fratte.

355 ●○○ $\frac{1}{x} < 0$ $[x < 0]$

356 ●○○ $\frac{1}{x-1} > 0$ $[x > 1]$

372 ●●○ $\frac{1}{5}x - \frac{1}{x-5} > \frac{x+1}{5} - \frac{x-1}{x-5}$ $\left[x < \frac{5}{4} \vee x > 5\right]$

373 ●●○ $\frac{4}{x} < \frac{1}{2}$ $[x < 0 \vee x > 8]$

Fondamentali alla prova

GUARDA!

ZTE: con il registro elettronico si può monitorare il livello della classe.

Su ZTE questa prova e un'altra completamente nuova

DISEQUAZIONI NUMERICHE INTERE **Risolvi le seguenti disequazioni.**

1 $(x-4)(4+x)-x(1+x)+11<4x$ $[x>-1]$

2 $(2x-1)^2-(x+2)(4x-1)+11x\geq 3$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

3 $\frac{1}{2}x-\frac{x+1}{4}+x>-\frac{1}{4}$ $[x>0]$

4 $\frac{3-x}{5}-\frac{x}{2}\leq-\frac{1+7x}{10}$ [impossibile]

5 **DISEQUAZIONI LETTERALI INTERE** La disequazione $(2-a)x\leq a^2-4$:

A ha infinite soluzioni solo se $a\neq 2$.

B ha soluzione $x\leq-(a+2)$ se $a>2$.

C ha soluzione $x\leq-(a+2)$ se $a<2$.

D ha soluzione $x\geq 0$ se $a=-2$.

PROBLEMI CON LE DISEQUAZIONI **Risolvi i seguenti problemi.**

6 Determina quali numeri naturali n godono della proprietà seguente: diminuendo il numero del 25%, si ottiene un numero minore di 33. $[n<44]$

7 Andrea, per andare in piscina, può scegliere tra due diverse possibilità: 140 € di iscrizione annuale più 2 € per ogni ingresso; 20 € per la tessera di socio più 8 € per ogni ingresso.
Per quanti ingressi risulta preferibile la seconda possibilità? [meno di 20]

8 **SISTEMI DI DISEQUAZIONI** Associa a ogni sistema il suo insieme delle soluzioni.

1. $\begin{cases}-2x+12>0\\1<-2-x\end{cases}$ b **2.** $\begin{cases}-x\leq-3\\2-x<0\end{cases}$ a **3.** $\begin{cases}-2(x-1)\leq 0\\x(1-x)<-3-x^2\end{cases}$ d **4.** $\begin{cases}6x+8>-2(3x+2)\\13-3x>1+x\end{cases}$ c

a. $x\geq 3$ **b.** $x<-3$ **c.** $-1<x<3$ **d.** impossibile

9 **EQUAZIONI CON I VALORI ASSOLUTI** Risolvi l'equazione $2+x+|3-x|=1$. [imp

10 **DISEQUAZIONI CON I VALORI ASSOLUTI** Risolvi la disequazione $2-|2x+1|\leq x$. $\left[x\leq-3 \vee x\geq\frac{1}{3}\right]$

...rispondente.