ALLEGATO 3 - Simulazione seconda prova scritta Liceo Scientifico Teresio Olivelli

**SIMULAZIONE DELL'ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE, a.s. 2022/2023**

**Il candidato risolva 1 problema e 4 quesiti a scelta.**

*Durata massima della prova 4h 40 min (5h 30min per PDP). È consentito l'uso della calcolatrice scientifica e di un formulario.*

### Problema 1

Fissato $\lambda \in \mathbb{R}$, sia $g_\lambda$ la funzione così definita:

$$g_\lambda(x) = x^3(x+\lambda) \ .$$

a) Determina il valore di $\lambda \in \mathbb{R}$ in modo che il grafico della funzione ammetta un flesso nel punto F di ascissa $x = -1$ .
Verificato che risulta $\lambda = 2$, indica con $\Gamma$ il grafico corrispondente.

b) Rappresenta $\Gamma$ dopo averne individuato le principali caratteristiche. Trova l'equazione della retta $t$ tangente a $\Gamma$ in F, le coordinate del punto A, ulteriore intersezione tra $\Gamma$ e la retta $t$, e l'area della regione piana delimitata da tali curve.

c) Calcola le coordinate del punto B, appartenente all'arco FA e distinto da F, tale che la tangente a $\Gamma$ in B sia parallela a $t$.

d) Determina il valore $\lambda$ del parametro in modo che $g_\lambda(x)$ sia simmetrica di $g_2(x)$ rispetto all'asse delle ordinate. Indica (motivando esaurientemente la risposta) se è possibile determinare un valore di $\lambda$ in modo tale che $g_\lambda(x)$ sia simmetrica di $g_2(x)$ rispetto all'asse delle ascisse.

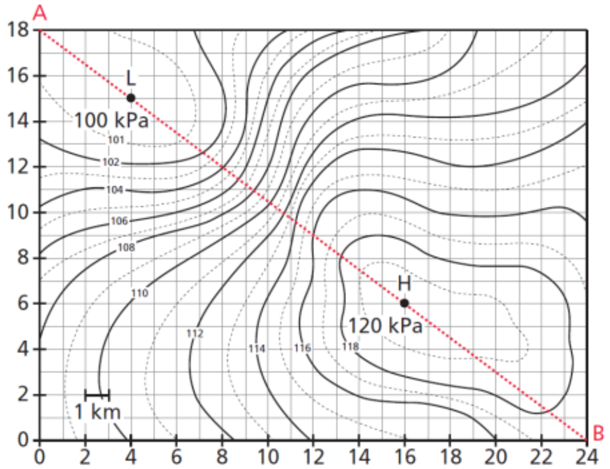
Considera, ora, la funzione $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita:

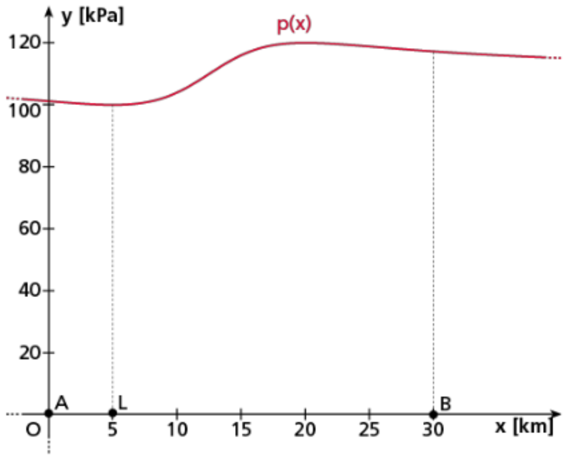
$$G(x) = \int_{-2}^{x} |g_2(t)|dt$$

e) Verifica che la funzione $G(x)$ non ammette estremi relativi nè assoluti e calcola $G(-2)$, $G(-\frac{3}{2})$, $G(0)$, senza aver preventivamente trovato l'espressione analitica di tale funzione.

### Problema 2

Nel sito web della stazione meteorologica cittadina sono stati pubblicati, come ogni giorno, due grafici. Il primo grafico visualizza la distribuzione locale della pressione atmosferica al suolo mediante linee di livello (isobare) che uniscono i punti aventi la stessa pressione (misurata in kilopascal, kPa). Le linee di livello corrispondono a valori consecutivi della pressione atmosferica (100, 101, 102, ecc). La diagonale AB passa per i punti L e H, dove la pressione assume rispettivamente un minimo (100 kPa) e un massimo (120 kPa). Il secondo grafico rappresenta l'andamento della pressione $p(x)$ in funzione della posizione $x$ lungo la diagonale AB ($x$ è espresso in kilometri, con origine in A).




a) Utilizzando i dati del primo grafico, individua sul secondo grafico il punto corrispondente ad H, fornendone ascissa e ordinata.

b) Una delle seguenti funzioni rappresenta la funzione $p(x)$ nell'intervallo $0 \leq x \leq 30$, con $a, b$ costanti reali non nulle. Stabilisci quale, in base ai dati forniti nei grafici.

$$y_1(x) = 500(a + be^{-x}) \qquad\qquad y_2(x) = \frac{300(2x+a)}{(2x+a)^2 + 225} + b$$

Per la funzione così determinata, ricava i valori delle costanti a e b.

c) Verificato che è la seconda funzione a rappresentare i dati riportati nel grafico, con $a = -25$ e $b = 110$, studia la corrispondente funzione $p(x)$ nel suo dominio naturale, indicando in particolare quanti punti di flesso ammette senza ricorrere allo studio della derivata seconda.

d) Utilizzando il teorema del valor medio integrale, per cui il valor medio della funzione $f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$ è calcolabile come:

$$f(\bar{c}) = \frac{\int_a^b f(t)dt}{b-a}$$

ricava il valore medio della pressione atmosferica lungo il tratto AB.

**Quesiti**

1. Un contenitore di assegnata capacità V ha la forma di un cilindro sormontato alle basi da due coni equilateri aventi le basi coincidenti con quelle del cilindro. Determina per quale valore del raggio di base del cilindro la superficie totale del contenitore risulta minima.

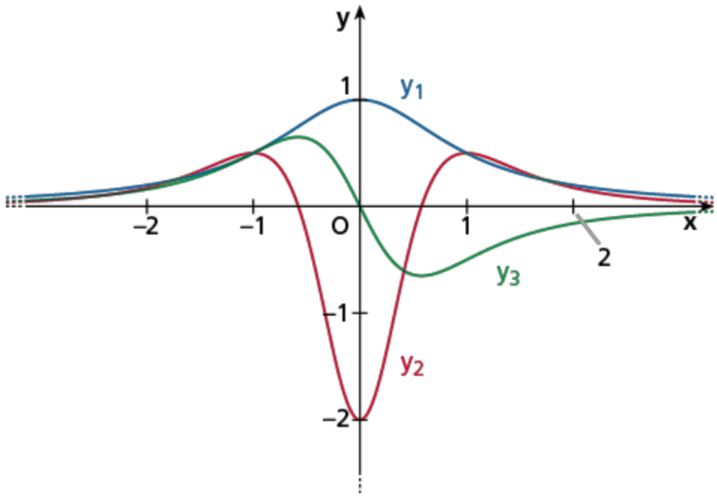
2. In un quiz televisivo un concorrente deve rispondere a 10 domande, ciascuna delle quali ha 4 risposte possibili fra cui una sola è corretta. Rispondendo a caso qual è la probabilità che il concorrente dia la risposta corretta a esattamente 6 domande, sufficienti per passare al gioco successivo?

3. Considera la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2(x+2) + bx - 8a & x < 2 \\ \ln(x-1) & x \geq 2 \end{cases}$$

Determina per quali valori dei parametri reali $a$ e $b$ la funzione è ovunque continua e derivabile.

4. Nella figura sottostante sono riportati i grafici di una funzione $f(x)$ , della sua derivata prima $f'(x)$ e della derivata seconda $f''(x)$. Associa $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ al giusto grafico, motivando la scelta.




Se uno dei tre grafici ha equazione:

$$y(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

determina le equazioni degli altri due.

5. Assegnata la funzione $f(x) = 3\ln(x) + 2x^2$, dopo aver dimostrato che $f(x)$ è una funzione invertibile, ricava il valore della derivata della funzione $F(x) = f^{-1}(x)$ , inversa di $f(x)$, nel punto $y_0 = 2$.

6. Determina l'angolo formato dalle tangenti al grafico della funzione:

$$f(x) = 1 + \sqrt{x^2 - x^4}$$

nel suo punto angoloso.

7. Calcola $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{ax} + \sin x + x}{\sqrt{1+x^2} + e^{2ax}}$, per $a = 0$, $a < 0$ e $a > 0$.

8. Sia $q$ la quantità venduta di un bene di consumo. La sua espressione analitica in funzione del generico prezzo unitario $p$ (in euro) è espressa dalla seguente relazione: $q = 500 - 25p$. Interpreta il significato di tale scrittura analitica.
Se il prezzo unitario $p$ non può superare i 15 euro, per quale valore del prezzo il ricavo che si ottiene dalla vendita è massimo? Si disegnino i grafici del ricavo in funzione del prezzo unitario e del ricavo in funzione della quantità venduta.